I. Derivace jednoduchých funkcí pomocí pravidel a vzorců

Příklad : $y = x^5 - 4x^3 + 5x - 6$

Užitím P2 $\quad y' = \left(x^5\right)' - \left(4x^3\right)' + \left(5x\right)' - \left(6\right)'$. U druhého a třetího členu použijeme P1

$y' = \left(x^5\right)' - 4\left(x^3\right)' + 5\left(x\right)' - \left(6\right)'$. Nyní podle V2 a poslední člen podle V1

$y' = 5x^4 - 4\cdot 3x^2 + 5\cdot 1 - 0 = 5x^4 - 12x^2 + 5$.

Příklad : $y = \mathrm{e}^x\left(x^2 - 6x + 4\right)$

Použijeme P3 $\quad y' = (\mathrm{e}^x)'\left(x^2 - 6x + 4\right) + \mathrm{e}^x\left(x^2 - 6x + 4\right)'$. Dále V3 a na derivaci trojčlenu v polední závorce V2 a V1

$= \mathrm{e}^x\left(x^2 - 6x + 4\right) + \mathrm{e}^x(2x - 6)$

Výsledek upravíme vytknutím e^x, potom $\quad y' = \mathrm{e}^x\left(x^2 - 4x - 2\right)$.

Příklad : $y = \left(x^2 - 1\right)\sin x + \left(x^2 + 2\right)\cos x$

Použijeme P3 $\quad y' = \left(x^2 - 1\right)'\sin x + \left(x^2 - 1\right)(\sin x)' + \left(x^2 + 2\right)'\cos x + \left(x^2 + 2\right)(\cos x)' =$

K výpočtu derivací, které zbývá vypočítat, použijeme V2 a V1, pro goniometrické funkce V7 a V8.

$= 2x\sin x + \left(x^2 - 1\right)\cos x + 2x\cos x + \left(x^2 + 2\right)(-\sin x)$

Z prvního a posledního součinu vytkneme $\sin x$, z ostatních $\cos x$.

$= \sin x\left(2x - x^2 - 2\right) + \cos x\left(x^2 + 2x - 1\right)$.

Příklad : $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Podle pravidla P4 je $\quad y' = \dfrac{x'\cdot\left(x^2 + 1\right) - x\cdot\left(x^2 + 1\right)'}{\left(x^2 + 1\right)^2}$. K derivaci částí, které zbývá zderivovat použijeme V2 a V1:

$$= \frac{1\cdot\left(x^2 + 1\right) - x\cdot 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{1 - x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2} \ .$$

Podobně

Příklad : $y = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$

$$y' = \frac{\left(1 - 2x^3\right)'\cdot x^2 - \left(1 - 2x^3\right)\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{-6x^2\cdot x^2 - \left(1 - 2x^3\right)\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{-6x^4 - 2x + 4x^4}{x^4} =$$

$$= \frac{-2x^4 - 2x}{x^4} = -2\frac{x^3 + 1}{x^3}.$$

Příklad : $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$.

Užijeme P4 a potom V7 a V8 :

$$y' = \frac{(\sin x)'(\cos x + 1) - \sin x(\cos x + 1)'}{(\cos x + 1)^2} = \frac{(\cos x)(\cos x + 1) - \sin x(-\sin x)}{(\cos x + 1)^2} =$$

upravíme čitatel zlomku

$$= \frac{\cos^2 x + \cos x + \sin^2 x}{(\cos x + 1)^2} = \frac{\cos x + 1}{(\cos x + 1)^2}$$, protože $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Po vykrácení $y' = \dfrac{1}{\cos x + 1}$.

Příklad : $y = \dfrac{1 + x^2}{2} \operatorname{arctg} x$.

Na derivaci součinu použijeme P3 : $y' = \left(\dfrac{1 + x^2}{2}\right)' \operatorname{arctg} x + \dfrac{1 + x^2}{2} (\operatorname{arctg} x)'$

Derivaci zlomku bychom mohli provést podle P4, ale protože je ve jmenovateli pouze konstanta, je $\dfrac{1 + x^2}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + x^2\right)$ a použijeme raději P1. Tedy

$$= \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)' \operatorname{arctg} x + \frac{1 + x^2}{2} (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{2} \cdot 2x \operatorname{arctg} x + \frac{1 + x^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

Po derivaci ještě upravíme krácením v součinech, takže $y' = x \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}$.

II. Derivace složených funkcí

Příklad : $y = \left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right)^3$

Tato složená funkce má dvě složky. Vnější je třetí mocnina, vnitřní racionální lomená funkce (podíl). Proto nejdříve použijeme V2 a potom pravidlo pro derivaci podílu P4.

$$y' = 3\left(\frac{x - 2}{x + 2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x - 2}{x + 2}\right)' = 3\left(\frac{x - 2}{x + 2}\right)^2 \cdot \frac{(x - 2)'(x + 2) - (x - 2)(x + 2)'}{(x + 2)^2}$$

zbývá zderivovat členy v čitateli druhého zlomku a upravit

$$= 3\frac{(x - 2)^2}{(x + 2)^2} \cdot \frac{1 \cdot (x + 2) - (x - 2) \cdot 1}{(x + 2)^2} = 3\frac{(x - 2)^2 (x + 2 - x + 2)}{(x + 2)^4} = \frac{12(x - 2)^2}{(x + 2)^4}$$.

Příklad : $y=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

Funkce je složená ze dvou složek. Vnější je přirozená logaritmická funkce, vnitřní racionální lomená funkce (podíl). Proto nejdříve použijeme V5 a potom pravidlo pro derivaci podílu P4.

$$y'=\frac{1}{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\left(x^2+1\right)'\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

Dopočítáme derivace dvojčlenů (P2, V2 a V1) a upravíme.

$$=\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{2x\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}=\frac{-4x}{x^4-1}\ .$$

Příklad : $y=\arcsin\sqrt{x}$

Vnější složkou je $y=\arcsin u$ a vnitřní $u=\sqrt{x}$. Proto použijeme V11 a potom V2.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivaci upravíme $\quad=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\ .$

Příklad : $y=x\sqrt{x^2+3}$

Nejdříve užijeme P3 (derivace součinu) $\quad y'=x'\sqrt{x^2+3}+x\left(\sqrt{x^2+3}\right)'\quad$ Dál použijeme V2 a v závorce je složená funkce, jejíž vnější složkou je druhá odmocnina a vnitřní polynom, proto

$$=1\cdot\sqrt{x^2+3}+x\cdot\frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x^2+3\right)'=\sqrt{x^2+3}+x\cdot\frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=$$

$$=\sqrt{x^2+3}+\frac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{(x^2+3)+x^2}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}\ .$$

Příklad : $y=x\cdot\mathrm{e}^{5x^2-3}$

Funkce je součinem, proto použijeme P3 a druhý činitel je složená funkce s vnější složkou e^u (V3) a vnitřní složkou $u=5x^2-3$ (P2, P1, V2, V1):

$$y'=x'\cdot\mathrm{e}^{5x^2-3}+x\cdot\left(\mathrm{e}^{5x^2-3}\right)'=1\cdot\mathrm{e}^{5x^2-3}+x\cdot\mathrm{e}^{5x^2-3}\cdot(5x^2-3)'=\mathrm{e}^{5x^2-3}+x\cdot\mathrm{e}^{5x^2-3}\cdot 5\cdot 2x\ .$$

Vytknutím exponenciální funkce $\quad y'=\mathrm{e}^{5x^2-3}(1+10x^2)\ .$

Příklad : $y = x^2 + \ln(4x+1)$

Nejdříve užijeme P2 (derivace součtu) $\quad y' = \left(x^2\right)' + \left[\ln(4x+1)\right]'$.

První sčítanec derivujeme podle V2 a druhý je složená funkce, takže budeme derivovat vnější složku podle V5:

$$= 2x + \frac{1}{4x+1} \cdot (4x+1)'$$

Derivací vnitřní složky dostaneme $\quad = 2x + \dfrac{1}{4x+1} \cdot 4 = 2x + \dfrac{4}{4x+1}$.

Příklad : $y = \ln^4 \operatorname{tg}(2x+1)$

Tato vícenásobně složená funkce má 4 složky, derivujeme od vnější:

$$y' = 4\ln^3 \operatorname{tg}(2x+1) \cdot \left[\ln \operatorname{tg}(2x+1)\right]' = 4\ln^3 \operatorname{tg}(2x+1) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(2x+1)} \left[\operatorname{tg}(2x+1)\right]' =$$

$$= 4\ln^3 \operatorname{tg}(2x+1) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(2x+1)} \cdot \frac{1}{\cos^2(2x+1)} (2x+1)' =$$

$$= 4\ln^3 \operatorname{tg}(2x+1) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(2x+1)} \cdot \frac{1}{\cos^2(2x+1)} \cdot 2$$

Příklad : Vypočtěte hodnotu první derivace funkce $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{2x}$ v bodě $x_0 = 1$.

Funkce má dvě složky, nejdřív použijeme V13 na derivaci vnější složky a potom P4 na derivaci podílu.

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{2x}\right)' = \frac{1}{1 + \dfrac{(x+1)^2}{4x^2}} \cdot \frac{(x+1)' \cdot 2x - (x+1) \cdot (2x)'}{(2x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{(x+1)^2}{4x^2}} \cdot \frac{1 \cdot 2x - (x+1) \cdot 2}{(2x)^2}$$

Derivaci bychom mohli úpravami (v 1. zlomku na společný jmenovatel, zjednodušit složený zlomek, ve 2. zlomku upravit čitatel a potom krátit) převést na tvar $y' = \dfrac{-2}{5x^2 + 2x + 1}$.

Počítáme-li hodnotu derivace v bodě, není nutné úpravy provádět. Můžeme zadaný bod dosadit za x přímo. Tentokrát dosadíme do upravené 1.derivace.

$$y'(1) = \frac{-2}{5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} \ .$$

Příklad : Vypočtěte hodnotu první derivace funkce $y = \mathrm{e}^{\sqrt{1-x}}$ v bodě $x_0 = -3$.

Funkce má 3 složky, postupně derivujeme:

$$y' = \mathrm{e}^{\sqrt{1-x}} \cdot \left(\sqrt{1-x}\right)' = \mathrm{e}^{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (1-x)' = \mathrm{e}^{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1)$$

Výsledek není třeba upravovat, protože počítáme hodnotu derivace v bodě $x_0 = -3$.

Po dosazení $y'(-3) = \mathrm{e}^{\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (-1) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^2$.

Příklad : Vypočtěte hodnotu první derivace funkce $y = \sqrt{\ln(1+\mathrm{tg}x)}$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Vypočítáme derivaci vícenásobně složené funkce

$$y' = \frac{1}{2}\left[\ln(1+\mathrm{tg}x)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[\ln(1+\mathrm{tg}x)\right]' = \frac{1}{2}\left[\ln(1+\mathrm{tg}x)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(1+\mathrm{tg}x)} \cdot (1+\mathrm{tg}x)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+\mathrm{tg}x)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+\mathrm{tg}x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+\mathrm{tg}x)}(1+\mathrm{tg}x)\cos^2 x},$$

dosadíme za x zadaný bod $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\ln\left(1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right)}\left(1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}\cdot 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}}.$$

III. Derivace vyšších řádů

Příklad : Vypočtěte derivaci druhého řádu funkce $y = \frac{5x}{(x-1)^3}$.

Derivujeme jako podíl $y' = \frac{5(x-1)^3 - 5x\cdot 3(x-1)^2}{\left[(x-1)^3\right]^2}$

Protože budeme znovu derivovat, je třeba funkci upravit. V čitateli můžeme vytknout a potom zlomek krátit :

$$= \frac{5(x-1)^3 - 5x\cdot 3(x-1)^2}{\left[(x-1)^3\right]^2} = \frac{(x-1)^2\left[5(x-1) - 5x\cdot 3\right]}{(x-1)^6} = \frac{5x-5-15x}{(x-1)^4} = \frac{-10x-5}{(x-1)^4}$$

Potom druhou derivaci vypočítáme znovu jako derivaci podílu

$$y'' = \left(\frac{-10x-5}{(x-1)^4}\right)' = \frac{-10\cdot(x-1)^4 - (-10x-5)\cdot 4(x-1)^3}{\left[(x-1)^4\right]^2}$$. Kdybychom počítali derivaci v konkrétním bodě, mohli bychom dosadit přímo. Protože počítáme derivaci obecně, je vhodné ji opět upravit (vytýkáním, krácením a sečtením členů):

$$= \frac{(x-1)^3\left[-10\cdot(x-1)-(-10x-5)\cdot 4\right]}{(x-1)^8} = \frac{\left[-10x-10+40x+20\right]}{(x-1)^5} = \frac{30x+10}{(x-1)^5}.$$

Příklad : Vypočtěte derivaci druhého řádu funkce $y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

Je to složená funkce, postupně derivujeme (přirozenou logaritmickou funkci, potom odmocninu a nakonec podíl)

$$y' = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

Protože budeme opět derivovat, je třeba funkci co nejlépe upravit

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\cdot\frac{-\cos x-\cos x\sin x-\cos x+\sin x\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}\cdot\frac{-\cos x}{1+\sin x} = \frac{-\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\cos x}$$

Výsledek derivujeme jako podíl (protože není proměnná x v čitateli, mohli bychom také derivovat jako složenou funkci $y' = -(\cos x)^{-1}$)

$$y'' = \left(\frac{-1}{\cos x}\right)' = \frac{0\cdot\cos x-(-1)(-\sin x)}{\cos^2 x} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Příklad : Vypočtěte hodnotu třetí derivace funkce $y = \mathrm{e}^{\sin x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Derivujeme složenou funkci: $y' = \mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos x$

Druhá derivace je navíc derivací součinu $y'' = (\mathrm{e}^{\sin x})'\cdot\cos x + \mathrm{e}^{\sin x}\cdot(\cos x)'$

$$= \mathrm{e}^{\sin x}\cos x\cdot\cos x + \mathrm{e}^{\sin x}\cdot(-\sin x) = \mathrm{e}^{\sin x}\cdot(\cos^2 x-\sin x)$$

Derivace třetího řádu podobně.

$$y''' = \mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos x\cdot(\cos^2 x-\sin x) + \mathrm{e}^{\sin x}\left[2\cos x\cdot(-\sin x)-\cos x\right]$$

Počítáme-li derivaci v bodě, nebudeme provádět úpravy, ale hned po derivaci dosadíme zadaný bod.

$$y'''(0) = \mathrm{e}^0\cdot 1\cdot(1-0) + \mathrm{e}^0\left[2\cdot(0)-1\right] = 1+(-1) = 0.$$